数理解析研究所講究録
1124 巻 2000 年 150-159

Highest weight modules over affine Lie algebras

広島大学理学部　谷崎俊之 (Toshiyuki TANISAKI)

1　問題の説明

$\mathfrak{g}$ を対称化可能な $\mathbb{C}$ 上の Kac-Moody リー代数, $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする. Δ をそのルート系とし, Δ^+ を正ルートの集合, Π を単純ルートの集合とする. また正の実ルートおよび正の虚ルートの集合をそれぞれ Δ^+_{re}, Δ^+_{im} で表す. $\mathfrak{h}^*$ 上の標準的な非退化対称双一次形式を $(\ ,\ ): \mathfrak{h}\times\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$ とし, 実ルート α に対応する余ルートを $\alpha^\vee=\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ で定める. W をワイル群とする. $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{n},\mathfrak{n}^-,\mathfrak{b},\mathfrak{b}^-$ を

$$\mathfrak{n}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha,\qquad \mathfrak{n}^-=\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$$
$$\mathfrak{b}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n},\qquad \mathfrak{b}^-=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^-$$

で定める. ただし $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\alpha\in\Delta$ に対応するルート空間である.

$\mathfrak{h}$ 加群 M と $\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対して

$$M_\mu=\{m\in M\mid hm=\mu(h)m\ (h\in\mathfrak{h})\}.$$

とおく. また $\mathfrak{h}$ 加群 M であって

$$M=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*}M_\mu,$$
$$\dim M_\mu<\infty \text{ for any } \mu\in\mathfrak{h}^*$$

を満たすものに対して, その指標を

$$\mathrm{ch}(M)=\sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*}(\dim M_\mu)e^\mu.$$

で定める.

$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{g}$ 加群 $M(\lambda)$, $L(\lambda)$ を

$$M(\lambda):=U(\mathfrak{g})/(\sum_{h\in\mathfrak{h}}U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h))+U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}),$$
$$L(\lambda):=M(\lambda)/(\text{極大真部分加群})$$

により定める.
　このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(M(\lambda)) =& \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathrm{e}^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}\\ =&\mathrm{e}^{\lambda}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1+\mathrm{e}^{-\alpha}+\mathrm{e}^{-2\alpha}+\cdots)^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}.\end{aligned}$$

が成り立つ. ただしシンボル e^{ξ} は $\mathrm{e}^{\xi_1}\mathrm{e}^{\xi_2}=\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2}$ を満たすものとする.

問題 1.1. 任意の $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ を決定せよ.

　$\rho\in\mathfrak{h}^*$ を, 任意の $\alpha\in\Pi$ に対して $(\rho,\alpha^\vee)=1$ を満たすものとし, ワイル群 W の $\mathfrak{h}^*$ への新たな作用を

$$w\circ\mu=w(\mu+\rho)-\rho \qquad (w\in W,\mu\in\mathfrak{h}^*).$$

で定める. $\ell:W\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を長さ関数とするとき, 次が成り立つ.

定理 1.2 (Weyl-Kac). $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ であって

$$(\lambda+\rho,\alpha^\vee)\in\mathbb{Z}_{>0} \qquad (\alpha\in\Delta^+_{\mathrm{re}})$$

を満たすものに対して, 次が成立する.

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\,\mathrm{ch}(M(w\circ\lambda)).$$

　$M(\lambda)$ の任意の既約部分商は, ある μ に対する $L(\mu)$ と同型であることが知られており, $M(\lambda)$ における $L(\mu)$ の重複度を $[M(\lambda):L(\mu)]$ で表すとき,

$$\mathrm{ch}(M(\lambda))=\sum_{\mu}[M(\lambda):L(\mu)]\,\mathrm{ch}(L(\mu)), \tag{1}$$

が成り立つ. もしも任意の $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対して $[M(\lambda):L(\mu)]$ が分かれば, $\mathrm{ch}(L(\mu))$ に関する一次方程式(1) を解くことにより

$$\mathrm{ch}(L(\mu))=\sum_{\lambda}a(\mu,\lambda)\,\mathrm{ch}(M(\lambda)) \qquad (a(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}) \tag{2}$$

の形の表示が得られる. 従って問題 1.1 は次の問題と同値な問題である:

問題 1.3. 任意の $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*$ に対して $[M(\lambda):L(\mu)]$ を決定せよ.

2 有限次元単純リー代数の場合

この節では $\dim \mathfrak{g} < \infty$ の場合に知られていることを述べる．P を整ウェイトの集合，すなわち

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}$$

とし，

$$\begin{aligned} P_{\text{reg}} &= \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \neq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}, \\ P^+ &= \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) > 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}, \\ P^- &= \{\lambda \in P \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) < 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\}. \end{aligned}$$

とおく．このとき

$$P_{\text{reg}} = W \circ P^+ = W \circ P^-, \qquad w_0 \circ P^+ = P^-,$$

が成り立つ．ただし w_0 は W の最長元である．

定理 2.1. (Kazhdan-Lusztig 予想 [13], Brylinski-柏原 [2], Beilinson-Bernstein [1])
(i) 任意の $\lambda \in P^+$ に対して

$$\mathrm{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} Q_{w,y}(1)\, \mathrm{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

(ii) 任意の $\lambda \in P^-$ に対して

$$\mathrm{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\, \mathrm{ch}(M(y \circ \lambda)).$$

ただしここで $\geqq, P_{y,w}(q), Q_{y,w}(q)$ はそれぞれ，Bruhat 順序，Kazhdan-Lusztig 多項式，逆 Kazhdan-Lusztig 多項式を表す．

なお公式 $Q_{w,y}(q) = P_{yw_0,ww_0}(q)$ により，定理の (i) と (ii) は同値な命題であることに注意しておく．

念のため（逆）Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を復習しておこう．Coxeter 系 (W,S) に対して $H(W)$ をその Hecke 代数とする．$H(W)$ は $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 代数で，$\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群としての自由基底 $\{T_w\}_{w\in W}$ を持ち，その積は

$$\begin{aligned} &T_{w_1}T_{w_2} = T_{w_1w_2} \quad \text{if } \ell(w_1w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2), \\ &(T_s + 1)(T_s - q) = 0 \quad \text{for } s \in S. \end{aligned}$$

により定まる（はじめの条件により $T_e = 1$ である）．

定理 2.2 (Kazhdan-Lusztig [13]). 任意の $w \in W$ に対して $C_w \in H(W)$ であって

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q) T_y = q^{-\ell(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(q^{-1}) T_{y^{-1}}^{-1}$$

with

$$\begin{aligned} &P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q], \\ &P_{w,w}(q) = 1, \\ &\deg P_{y,w}(q) \leqq \frac{\ell(w) - \ell(y) - 1}{2} \quad \textit{for } y < w \end{aligned}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

またー $w \leqq y$ のとき $Q_{w,y}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ を

$$\sum_{w \leqq y \leqq z} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} Q_{w,y}(q) P_{y,z}(q) = \delta_{w,z}$$

により定める．

命題 2.3 (Kazhdan-Lusztig [13]).

$$|W| < \infty \quad \Rightarrow \quad Q_{w,y}(q) = P_{yw_0,ww_0}(q).$$

ただし w_0 は W の最長元とする．．

最高ウェイトが整ウェイトでない一般の場合には，話はもう少し複雑になる．それを述べるために記号を用意する．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}\}, \\ \Pi(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta^+(\lambda)) \cap (-\Delta(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+(\lambda) \rangle \subset W, \\ S(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi(\lambda)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^+(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta^+(\lambda) \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) = 0\}, \\ \Pi_0(\lambda) &= \{\alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta_0^+(\lambda)) \cap (-\Delta_0(\lambda)) = \{-\alpha\}\}, \\ W_0(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0^+(\lambda) \rangle \subset W(\lambda), \\ S_0(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_0(\lambda)\}. \end{aligned}$$

とおく．このとき $(W(\lambda),S(\lambda))$ および $(W_0(\lambda),S_0(\lambda))$ は Coxeter 系になる．Coxeter 系 $(W(\lambda),S(\lambda))$ の Bruhat 順序，長さ関数，Kazhdan-Lusztig 多項式，逆 Kazhdan-Lusztig 多項式を，それぞれ $\leq_\lambda$, ℓ_λ, $P^\lambda_{y,w}(q)$, $Q^\lambda_{y,w}(q)$ で表す．

$\mathcal{C}^+,\mathcal{C}^-$ を

$$\mathcal{C}^+ = \{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid (\lambda+\rho,\alpha^\vee)\geqq 0 \text{ for any } \alpha\in\Delta^+(\lambda)\},$$
$$\mathcal{C}^- = \{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid (\lambda+\rho,\alpha^\vee)\leqq 0 \text{ for any } \alpha\in\Delta^+(\lambda)\}.$$

で定めるとき，

$$\mathfrak{h}^* = \bigsqcup_{\lambda\in\mathcal{C}^+} W(\lambda)\circ\lambda = \bigsqcup_{\lambda\in\mathcal{C}^-} W(\lambda)\circ\lambda.$$

が成り立つ．

定理 2.4. (i) $\lambda\in\mathcal{C}^+$ とする．$w\in W(\lambda)$ が $wW_0(\lambda)$ の最長元ならば，

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y\geqq_\lambda w}(-1)^{\ell_\lambda(y)-\ell_\lambda(w)}Q^\lambda_{w,y}(1)\,\mathrm{ch}(M(y\circ\lambda)).$$

が成立する．(ii) $\lambda\in\mathcal{C}^-$ とする．$w\in W(\lambda)$ が $wW_0(\lambda)$ の最短元ならば，

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y\leqq_\lambda w}(-1)^{\ell_\lambda(w)-\ell_\lambda(y)}P^\lambda_{y,w}(1)\,\mathrm{ch}(M(y\circ\lambda)).$$

が成立する．

この場合にも先ほどと同様に (i) と (ii) は同値な命題である．Jantzen [5] の結果により，証明は λ が有理ウェイトの場合に帰着する．また有理ウェイトの場合には，Beilinson-Bernstein の結果（未発表）と Lusztig [14] の結果から上の定理が従う．

3 無限次元 Kac-Moody リー代数の場合

以下 $\mathfrak{g}$ は一般の対称化可能 Kac-Moody リー代数とする．

有限次元の場合と同様に $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して

$$\begin{aligned}
\Delta^+(\lambda) &= \{\alpha\in\Delta^+_{\mathrm{re}} \mid (\lambda+\rho,\alpha^\vee)\in\mathbb{Z}\},\\
\Pi(\lambda) &= \{\alpha\in\Delta^+(\lambda) \mid_\alpha (\Delta^+(\lambda))\cap(-\Delta(\lambda)) = \{-\alpha\}\},\\
W(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha\in\Delta^+(\lambda)\rangle\subset W,\\
S(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha\in\Pi(\lambda)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^+_0(\lambda) &= \{\alpha\in\Delta^+(\lambda) \mid (\lambda+\rho,\alpha^\vee)=0\},\\
\Pi_0(\lambda) &= \{\alpha\in\Delta^+_0(\lambda) \mid s_\alpha(\Delta^+_0(\lambda))\cap(-\Delta_0(\lambda)) = \{-\alpha\}\},\\
W_0(\lambda) &= \langle s_\alpha \mid \alpha\in\Delta^+_0(\lambda)\rangle\subset W(\lambda),\\
S_0(\lambda) &= \{s_\alpha \mid \alpha\in\Pi_0(\lambda)\}
\end{aligned}$$

とおく．$(W(\lambda), S(\lambda))$ および $(W_0(\lambda), S_0(\lambda))$ は Coxeter 系になる．$\leq_\lambda$, ℓ_λ, $P^\lambda_{y,w}(q)$, $Q^\lambda_{y,w}(q)$ をそれぞれ Coxeter 系 $(W(\lambda), S(\lambda))$ の Bruhat 順序，長さ関数，Kazhdan-Lusztig 多項式，逆 Kazhdan-Lusztig 多項式とする．

$\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda+\rho, \alpha^\vee) \geqq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda),\\ (\lambda+\rho, \alpha) \notin 2(\alpha,\alpha)\mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+_{\mathrm{im}}\},\\ \mathcal{C}^- = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda+\rho, \alpha^\vee) \leqq 0 \text{ for any } \alpha \in \Delta^+(\lambda),\\ (\lambda+\rho, \alpha) \notin 2(\alpha,\alpha)\mathbb{Z} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+_{\mathrm{im}}\}.\end{aligned}$$

により定めるとき，($\mathfrak{g}$ が有限次元でなければ)

$$\mathfrak{h}^* \supsetneqq \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{C}^+} W(\lambda)\circ\lambda \neq \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{C}^-} W(\lambda)\circ\lambda \subsetneqq \mathfrak{h}^*$$

が成り立つ．さらに $\mathcal{C}^\pm_{\mathrm{reg}}$, $\mathcal{C}^\pm(\mathbb{Q})$, $\mathcal{C}^\pm_{\mathrm{reg}}(\mathbb{Q})$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\pm_{\mathrm{reg}} &= \{\lambda \in \mathcal{C}^\pm \mid w \in W, w\circ\lambda = \lambda \;\Rightarrow\; w = 1\},\\ \mathcal{C}^\pm(\mathbb{Q}) &= \{\lambda \in \mathcal{C}^\pm \mid (\lambda+\rho, \alpha) \in \mathbb{Q} \text{ for any } \alpha \in \Delta^+\},\\ \mathcal{C}^\pm_{\mathrm{reg}}(\mathbb{Q}) &= \mathcal{C}^\pm_{\mathrm{reg}} \cap \mathcal{C}^\pm(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

で定める．

定理 3.1 (柏原-谷崎 [11]). $\mathfrak{g}$ を一般の対称化可能 *Kac-Moody Lie* 代数とする．$\lambda \in \mathcal{C}^+_{\mathrm{reg}}(\mathbb{Q})$ のとき，任意の $w \in W(\lambda)$ に対して

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq_\lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(y)-\ell_\lambda(w)} Q^\lambda_{w,y}(1)\,\mathrm{ch}(M(y\circ\lambda)).$$

が成立する．

定理 3.2 (柏原-谷崎 [12]). $\mathfrak{g}$ をアフィン・リー代数とする．

(i) $\lambda \in \mathcal{C}^+$ のとき，$w \in W(\lambda)$ であって $wW_0(\lambda)$ の最長元になっているものに対して，

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \geqq_\lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(y)-\ell_\lambda(w)} Q^\lambda_{w,y}(1)\,\mathrm{ch}(M(y\circ\lambda))$$

が成立する．

(ii) $\lambda \in \mathcal{C}^-$ のとき，$w \in W(\lambda)$ であって $wW_0(\lambda)$ の最短元になっているものに対して，

$$\mathrm{ch}(L(w\circ\lambda)) = \sum_{y \leqq_\lambda w} (-1)^{\ell_\lambda(w)-\ell_\lambda(y)} P^\lambda_{y,w}(1)\,\mathrm{ch}(M(y\circ\lambda))$$

が成立する．

4 証明について

証明のスキームは次のとおり．

$\boxed{\text{最高ウェイト加群}}$

Algebraic part

$\boxed{\text{旗多様体上の } D \text{ 加群}}$

Riemann-Hilbert 対応

$\boxed{\text{旗多様体上の偏屈層}}$

Topological part

$\boxed{\text{Kazhdan-Lusztig 多項式}}$

まず旗多様体およびその中の Schubert 多様体について述べる．$X = G/B^-$ を柏原の構成した旗多様体とする．これは局所的には無限次元アフィン空間

$$\mathbb{A}^\infty = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_i \mid i \in \mathbb{Z}]$$

に同型な無限次元スキームである．$w \in W$ に対して，

$$X^w = BwB^-/B^- \subset X, \qquad X_w = B^-wB^-/B^- \subset X$$

とおく．

定理 4.1 (柏原 [6]). (i) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w$.
(ii) $X^w \cong \mathbb{A}^\infty$ *and* $\mathrm{codim}\, X^w = \ell(w)$.
(iii) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \geqq w} X^y$.

定理 4.2 (柏原-谷崎 [9]). $X' = \bigcup_{w \in W} X_w$ とおくとき，次が成立する．(i) $X' = \bigsqcup_{w \in W} X_w$.
(ii) $X_w \cong \mathbb{A}^{\ell(w)}$.
(iii) $\overline{X_w} = \bigsqcup_{y \leqq w} X_y$.

$\overline{X^w}$ を余次元有限の Schubert 多様体，$\overline{X_w}$ を次元有限の Schubert 多様体と呼ぶ．

Algebraic part

$\lambda \in \mathcal{C}^+$ のとき，$w \in W(\lambda)$ に対する $L(w \circ \lambda)$ は余次元有限の Schubert 多様体 $\overline{X^w}$ を台にもつ左 $D_X(\lambda)$ 加群に対応し，また $\lambda \in \mathcal{C}^-$ のとき，$w \in W(\lambda)$ に対する $L(w \circ \lambda)$ は次元有限の Schubert 多様体 $\overline{X_w}$ を台にもつ右 $D_X(\lambda)$ 加群に対応している．この間の事情を，以下 $\lambda = 0 \in \mathcal{C}^+$ の場合に限って説明しよう．

左 D_X 加群 $\mathcal{M}_w$, $\mathcal{L}_w$ を

$$\mathcal{M}_w = \mathbb{D}i_{w!}\mathcal{O}_{X^w}, \qquad \mathcal{L}_w = \mathbb{D}i_{w!*}\mathcal{O}_{X^w}$$

により定める．ここで $i_w : X^w \to X$ は埋め込み写像，$\mathbb{D}i_{w!}, \mathbb{D}i_{w!*}$ は D 加群論の意味でのある種の直像関手である（詳細は省略する）．ある種の大域切断関手

$$\tilde{\Gamma} : \{B\text{-equivariant } D_X\text{-modules}\} \to \{\mathfrak{g}\text{-modules}\}.$$

が定まり，以下が成立する．

定理 4.3. (i) $\tilde{\Gamma}$ は完全関手である．
(ii) $\tilde{\Gamma}(\mathcal{M}_w) = M(w \circ 0)$.
(iii) $\tilde{\Gamma}(\mathcal{L}_w) = L(w \circ 0)$.

Riemann-Hilbert 対応

De Rham 関手

$$DR : \{\text{regular holonomic } D\text{-modules}\} \simeq \{\text{perverse sheaves}\}$$

に関して次が成立する．

定理 4.4. (i) $DR(\mathcal{M}_w) = \mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]$.
(ii) $DR(\mathcal{L}_w) = {}^{\pi}\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]$.

Topological part

定理 4.5. 適当な（完備化された）*Grothendieck* 群において

$$[\mathbb{C}_{X^w}[-\ell(w)]] = \sum_{y \geqq w} (-1)^{\ell(y)-\ell(w)} Q_{w,y}(1) [{}^{\pi}\mathbb{C}_{X^y}[-\ell(y)]]$$

が成立する．

定理 4.3，定理 4.4，定理 4.5 から求める結果が得られる．

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **292** (1981) 15–18.

[2] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math., **64** (1981) 387–410.

[3] L. Casian, *Proof of the Kazhdan-Lusztig conjecture for Kac-Moody algebras (the characters $ch\, L_{\omega\rho-\rho}$)*, Adv. Math., **119** (1996) 207–281.

[4] L. Casian, *Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kac-Moody algebras of affine type)*, preprint.

[5] J. C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht*, Lecture Notes in Math. **750**, Springer Verlag (1979).

[6] M. Kashiwara, "The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra" in *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1990.

[7] M. Kashiwara, "Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra" in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87** Birkhäuser, Boston, 1990, 407–433.

[8] M. Kashiwara, T. Tanisaki, "Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebra II" in *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Vol. II*, Progr. Math. **92** Birkhäuser, Boston, 1990, 159–195.

[9] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level*, Duke Math. J., **77** (1995) 21–62.

[10] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level II: Nonintegral case*, Duke Math. J., **84** (1996) 771–813.

[11] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras III—positve rational case*, Asian J. Math., **2**(4) (1998) 779–832.

[12] M. Kashiwara, T. Tanisaki, *Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras.* math.RT/9903123, to appear in the proceedings of the ICRT, held at East China Normal University during June 29-July 4, 1998.

[13] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math., **53** (1979) 165–184.

[14] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Ann. Math. Studies, Vol. **107**, Princeton Univ. Press, (1984).